Πιθανότητες 27/10 

## ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π με $P$ μέτρο πιθανότητας. Έστω $B \in \mathcal{A}$ με
χώρος πιθανότητας

$P(B) > 0$. Τότε η συνολοσυνάρτηση $P(\cdot | B) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ είναι μέτρο πιθανότητας

### Απόδειξη

Αρκεί νδο η $P(\cdot / B)$ ικανοποιεί τα αξιώματα του Kolmogorov

Δηλ: A1) $P(A|B) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

A2) $P(S/B) = 1$

A3) Αν $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$ τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i / B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i / B)$$

Που αποδεικνύεται εύκολα.

### Παρατήρηση

Αφού λόγω της πρότασης η $P(\cdot / B)$ είναι μέτρο πιθανότητας ισχύουν γι' αυτήν όλες οι ιδιότητες π.χ i) $P(A/B) = 1 - P(A^c/B)$

ii) $P(A \cup B/\Gamma) = P(A/\Gamma) + P(B/\Gamma) - P(A \cap B/\Gamma)$

### Παράδειγμα

1) Ζάρι ρίχνεται 2 φορές.

$A = \{$η απόλυτη τιμή της διαφοράς των ρίψεων είναι ίση με 4$\}$

$B = \{$το άθροισμα των αποτελεσμάτων των ρίψεων είναι ίσο με 8$\}$

$P(A|B) = ?$

Λύση

$A = \{(6,2), (2,6), (5,1), (1,5)\}$

$B = \{(6,2), (2,6), (5,3), (3,5), (4,4)\}$

$A \cap B = \{(6,2), (2,6)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{||A\cap B||}{||S||}}{\frac{||B||}{||S||}} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

2) Από μια τράπουλα των 52 χαρτιών τραβάω 5

α. $P$(να εκλεγούν στην 5-άδα ακριβώς 2 άσσοι αν είναι γνωστό ότι έχουν εκλεγεί ακριβώς 2 ρηγάδες) $= ?$

β. $P$(να εκλεγούν στην 5-άδα ακριβώς 2 άσσοι δοθέντος ότι έχει εκλεγεί τουλάχιστον ένας άσσος) $= ?$

Λύση

$A = \{$ακριβώς 2 άσσοι$\}$

$B = \{$ακριβώς 2 ρηγάδες$\}$

α) $$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B) = \frac{\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}$$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}$$

Άρα $P(A|B) = \dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{44}{1}}{\binom{48}{3}} = 0,0153$

β) $\Gamma = \{$τουλάχιστον 1 άσσος$\}$

$$P(A|\Gamma) = \frac{P(A\cap\Gamma)}{P(\Gamma)}$$

$$P(A\cap\Gamma) = \frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}$$

ακριβώς 2 άσσοι

$$P(\Gamma) = 1 - P(\Gamma^c) = 1 - P(\text{κανένας άσσος}) = 1 - \frac{\binom{48}{5}\times\overset{1}{\binom{4}{0}}}{\binom{52}{5}}$$

Άρα $P(A/\Gamma) = 0,1170$

__Παρατήρηση__

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}$$

Παρατηρώ ότι $P(A|B) < P(A)$ ενώ $P(A|\Gamma) > P(A)$

Υπάρχουν και φορές όπου η δεσμευμένη πιθανότητα είναι ίση με την αδέσμευτη. (ανεξαρτησία ενδεχομένων)

# Εφαρμογές Δεσμευμένης Πιθανότητας



**Πρόταση**

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π

α) **Πολλαπλασιαστική Αρχή Πιθανοτήτων ή Πολ/κος Κανόνας**

Αν $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ με $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ τότε

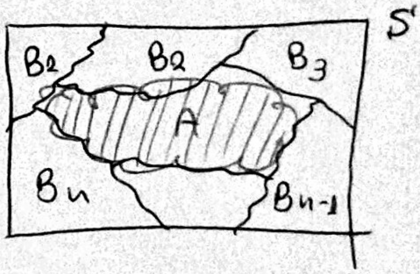
$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2 / A_1)\, P(A_3 / A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

β) **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (Θ.Ο.Π)**

Αν $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ μια διαμέριση του $S$

($B_i \in S$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$) τότε $\forall A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)\, P(B_i)$$




**Απόδειξη**

α) B' μέλος $= \cancel{P(A_1)} \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{\cancel{P(A_1)}} \dfrac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \dfrac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} =$

$$= P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

β) $A = A \cap S = A \cap \left( \bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$

$P(A) = P\left( \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i) \right)$

Επειδή $B_i \cap B_j = \emptyset$ $i \neq j$ ισχύει $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$ $i \neq j$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)\, P(B_i)$$

1) Ένας φοιτητής συμμετέχει σε μια εξέταση στην οποία διαλέγονται στην τύχη 3 ερωτήσεις από ένα σύνολο 100 ερωτήσεων που του δίνονται. Περνάει τις εξετάσεις αν απαντήσει σωστά και τις 3 ερωτήσεις. Αν γνωρίζει την σωστή απάντηση 90 ερωτήσεων ποια η πιθανότητα να περάσει τις εξετάσεις?

Λύση

Έστω $A_i = \{η\ i\text{-ερώτηση να ανήκει στις } 90\}$

$$P(\text{περάσει}) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) =$$

$$= \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{88}{98} = 0,7265$$

2) Κάλπη περιέχει m μαύρες και n άσπρες σφαίρες. Μια σφαίρα επιλέγεται. Το χρώμα της εξετάζεται και η σφαίρα τοποθετείται πάλι στην κάλπη μαζί με άλλες k σφαίρες ίδιου χρώματος. Μια δεύτερη σφαίρα επιλέγεται. Να υπολογιστεί η πιθανότητα α) η 2η σφαίρα να είναι άσπρη β) και οι 2 σφαίρες να είναι άσπρες

Λύση

Έστω $B_1 = \{η\ 1η\ άσπρη\}$

$B_2 = \{η\ 1η\ μαύρη\}$

α. $A = \{η\ 2η\ άσπρη\}$

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2)$$

$$= \left( \frac{n+k}{m+n+k} \cdot \frac{n}{m+n} \right) + \left( \frac{n}{m+n+k} \cdot \frac{m}{m+n} \right)$$

β. $P(A \cap B_1) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) = \frac{n+k}{m+n+k} \cdot \frac{n}{m+n}$